Aalborg, d. 17. november 2004

Mercatorkortet

Mercatorkortet (eller Mercatorprojektionen) er udviklet omkring 1562 af Gerhard Kremer (1512 - 1594). Den latiniserede udgave af navnet er Gerardus Mercator („Handelsmand“, „kræmmer“). Nulmeridianen blev i 1889 valgt til at være den meridian, der går igennem Greenwich-observatoriet nær London. Før den tid anvendtes Paris-meridianen.

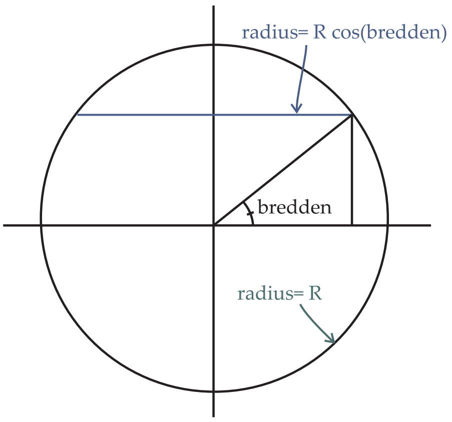
Afstande på Jorden

Et meridianminut er (pr. definition) 1 sm. Meridianerne er halve storcirkler, og derfor er alle meridianminutter lige lange, uanset hvor på kloden, vi befinder os.
En cirkel (og dermed også en storcirkel) omfatter $60 \times 360 = 21.600$ minutter. Jordradien er ca. 6.300 km, og dette gør, at 1 sømil (1 sm) bliver 1852 m. Virkeligheden er dog en smule mere kompliceret, idét Jorden ikke er en perfekt kugle. I dette lille skrift ser vi på princippet for kortafbildningen, og vi anvender for letheds skyld en simpel model, hvor Jorden er en kugle.

Vi har nu:

1 meridianminut= 1 breddeminut= 1 sm
1 breddeparallelminut= 1 længdeminut= 1 sm·cos(bredden)

Radius i lillecirklen (breddeparallellen) er lig med $R \cdot \cos(\text{bredden})$, hvor R = storcirkelradien= Jordradien $\approx$ 6.300 km. Se figuren.



Jorden set fra siden.

Skemaet viser nogle eksempler på længden af længdeminuttet på forskellige bredder.

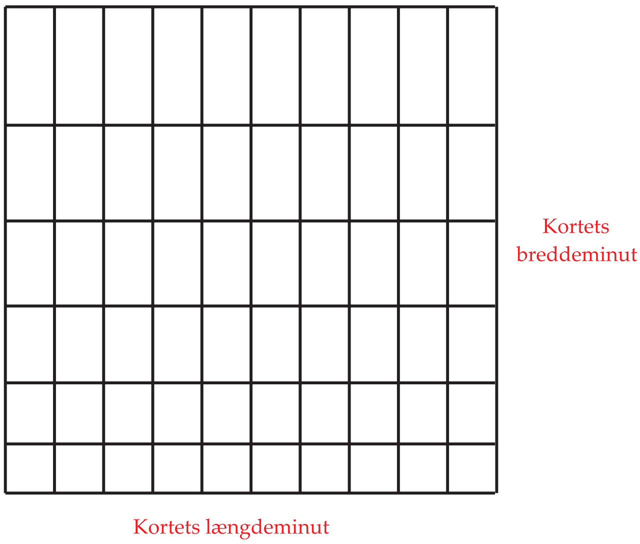
Bredde	cos(bredde)	Længdeminut
0°	1	1 sm
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,87 sm
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,71 sm
60°	$\frac{1}{2}$	0,50 sm
90°	0	0 sm

Idéen bag Mercatorkortet

I Mercatorkortet ønsker vi en vinkeltro afbildning af Jordklodens overflade (en *konform afbildning*), hvilket indebærer, at x cm hen ad længdeskalaen skal repræsentere lige så mange sømil, som x cm op ad breddeskalaen.

Vi kan nu finde følgende afbildning (se figuren), idet vi lader $\sim$ betyde „svarer til“ :

Kortets længdeminut= x cm $\sim$ 1 sm $\cdot$ cos(bredden)
Kortets breddeminut= $\frac{x}{\cos(\text{bredden})}$ cm $\sim$ 1 sm



Mercatorkortet.

Dette giver nemlig:

x cm ad længdeskalaen $\sim$ 1 sm$\cdot$ cos(bredden)
x cm ad breddeskalaen $\sim$ 1 sm$\cdot$ cos(bredden)

Kortet skal altså konstrueres, så længdeminuttet er x cm overalt på kortet (derved bliver meridianerne lodrette, parallelle linier), og så breddeminuttet er $\frac{x}{\cos(\text{bredden})}$ cm. Tallet x vælges alt efter hvilket målestoksforhold, der ønskes for kortet. Det ses af det ovenstående, at målestoksforholdet for kortet vil variere med bredden.

Mercators formel

Der er ikke noget, der hedder „Mercators formel“, men lad os alligevel nu finde en formel for afbildningen.

Ønsker vi at fremstille et kort, der viser området omkring 60° N eller 60° S bredde, ser vi, at vi kan beregne målestoksforholdet lige nøjagtigt på 60°: Der vil den være $\frac{1}{\cos 60°} = 2$.

Vi kan imidlerid *ikke* afsætte 60 sm som 120 cm ud ad breddeskalaen (hvis vi sætter 1 længdeminut= 1 cm), da sømilen på fx. 61° er $\frac{1}{\cos 61°}$ = 2,06 cm, og på 59° er den 1,94 cm.

Vi er nødt til at beregne stykkerne for helt små afstande ad gangen, fx. 1 sm eller mindre og summere dem. Jo mindre stykker, desto nøjagtigere kort. Målestoksforholdet varierer jævnt hen over kortet både i længde- og i bredderetningen.

Vil vi have det *helt* nøjagtigt, må vi anvende *infinitesimalregning*, hvor der regnes med uendeligt små stykker, og der fås:

$$\text{Kortets breddeminut} = \int \frac{1}{\cos x}\,dx \cdot \frac{180 \cdot 60}{\pi} = \ln|\,\mathrm{tg}(\frac{x}{2} + 45°)| \cdot \frac{180 \cdot 60}{\pi}$$

hvor x er bredden

Udtrykt i matematisk sprog, kan man sige, at Mercators funktion er en stamfunktion til sekansfunktionen.

Da vi har ladet 1 cm på kortets længdeskala være 1 bueminut, skal vi for at få kortets breddeskala i cm, gange med omsætningsfaktoren $\frac{180 \cdot 60}{\pi}$, som omsætter radianer til bueminutter. Eksempelvis får vi for den sømil, som ligger fra $60°\ 00'$ til $60°\ 01'$, at den skal fylde:

$$\text{Afstand i cm} = \left[\ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + 45°\right)\right)\right]_{60°\ 00'}^{60°\ 01'} \cdot \frac{180 \cdot 60}{\pi} = 2{,}000507 \quad \text{cm}$$

På samme måde ses, at de 60 sm fra 60° til 61° skal fylde 121,9 cm.

Eksempel

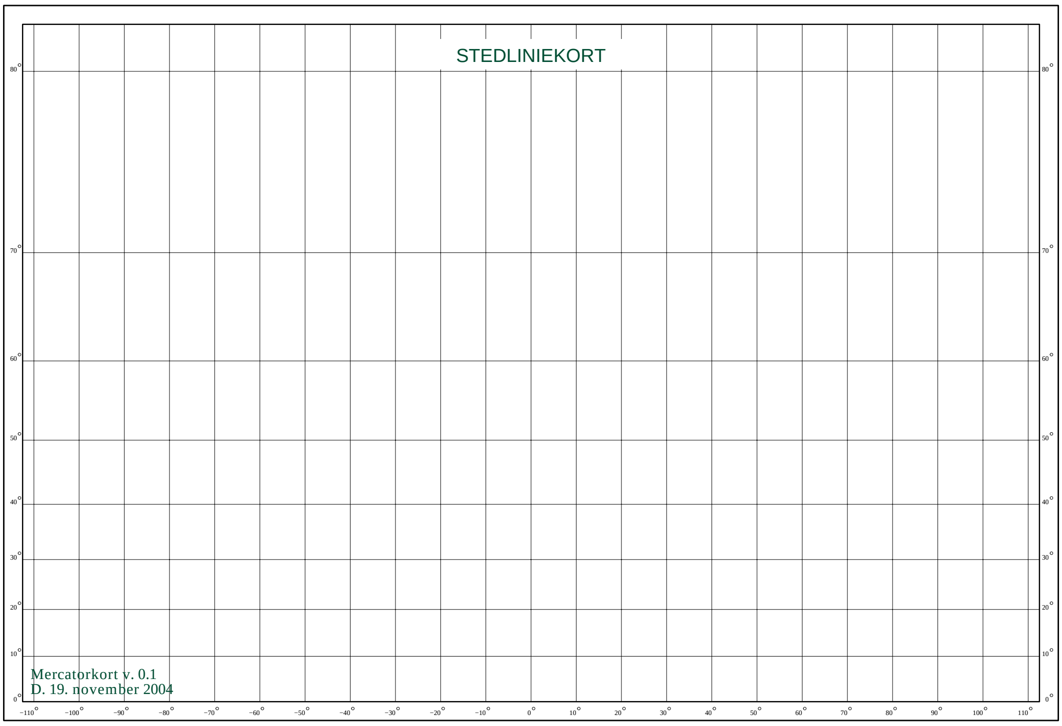
Vi betragter Funders stedliniekort, hvor 1 længdeminut er 5,6 cm udmålt med en almindelig lineal. Dette svarer til 10 m for 180°, så der er altså 20 m hele vejen rundt om Jorden ved Ækvator.

Lad os beregne, hvormeget skalaen for 39° til 47° i bredde skal fylde:

$$\text{Afstand i cm} = \int_{39°}^{47°} \frac{1}{\cos x}\,dx \cdot \frac{180 \cdot 5{,}6}{\pi} = \left[\ln\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + 45°\right)\right)\right]_{39°}^{47°} \cdot 320{,}86 = 61{,}4 \quad \text{cm}$$

Dette kan ses at stemme med virkeligheden, hvis vi tager linealen og måler efter.

Ved samme metode fås stykket fra 57° til 62° at fylde 55,3 cm.



Et Mercator stedliniekort.

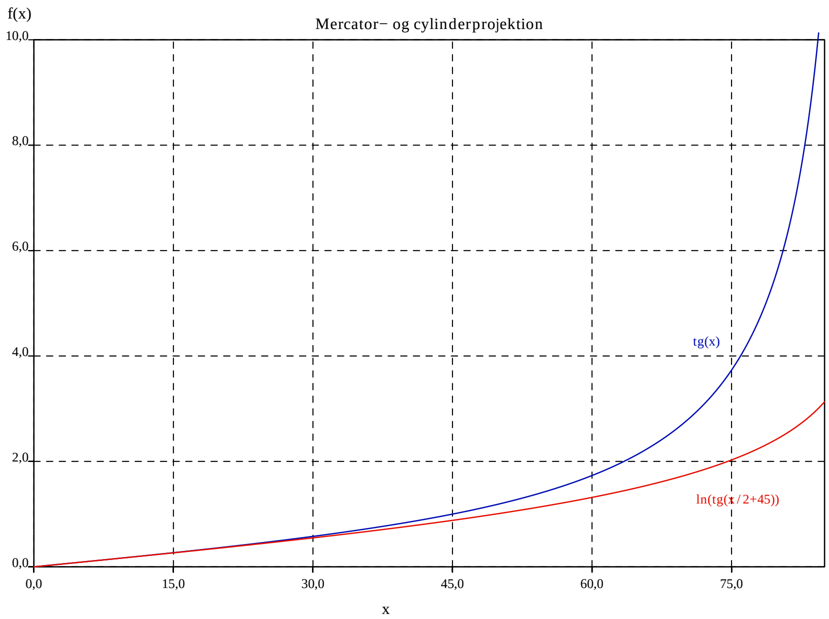
Sammenligning

Det bemærkes, at Mercatorkortet *ikke* er fremkommet ved en cylinderprojektion.
Cylinderprojektionen er givet ved:

$$\text{Breddeskala} = \text{tg}(\text{bredden})$$

Mercatorprojektionen er givet ved:

$$\text{Breddeskala} = \ln\left|\text{tg}\left(\frac{\text{bredden}}{2} + 45°\right)\right|$$



Graf for cylinderfunktionen og Mercatorfunktionen.

	Cylinder	Mercator
x	$\text{tg}(x)$	$\ln\left\|\text{tg}\left(\frac{x}{2}+45°\right)\right\|$
0°	0,00	0,00
15°	0,27	0,26
30°	0,58	0,55
45°	1,00	0,88
60°	1,73	1,32
75°	3,73	2,03
80°	5,67	2,44
85°	11,43	3,13
89°	57,29	4,74
89,5°	114,59	5,44
89,9°	572,96	7,04

Hvis vi lader b betyde bredden, er differentialkvotienten langs x-aksen $\frac{1}{\cos b}$ i begge tilfælde. Differentialkvotienten er langs y-aksen:

$$\text{For cylinder:} \frac{d}{dx} = \frac{1}{\cos^2 b}$$

$$\text{For Mercator:} \frac{d}{dx} = \frac{1}{\cos b}$$

For Mercatorkortet er differentialkvotienten i x-retningen lig med differentialkvotienten i y-retningen, hvilket gør, at afbildningen bliver vinkeltro. Funktionen $\frac{1}{\cos x}$ kaldes også „sekans x“

Betingelsen for at være vinkeltro

Som nævnt er Mercatorkortet *vinkeltro*, forstået på den måde, at en kurslinie på Jordkloden afbildes som en ret linie i kortet. En kurslinie (som også kaldes en *loxodrom*) er en linie, som skærer meridianerne under den samme vinkel.

Vi kan opstille nogle ligninger, som udtrykker betingelsen for, at et kort er vinkeltro. Sagt i ord er betingelsen, at 1 sømil i længderetningen skal afbildes på samme antal cm som 1 sm i bredderetningen overalt på kortet.

Lidt matematik...

Dette er for nogle lidt trivielt, men alligvel vises herunder hvorledes det „ubestemte Mercatorintegral“ kan udledes.

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\sin \alpha}\,d\alpha = \int \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha$$

Der er anvendt nedenstående substitution og trigonometriske identitet:

$$\alpha = x + \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow x = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \frac{dx}{d\alpha} = 1$$

$$\sin x = \sin(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

Vi fortsætter:

$$\int \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\,d\alpha = \int \frac{1}{\sin\beta\cos\beta}\,d\beta = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\beta\cos^2\beta}\,d\beta = \int \frac{1}{\gamma}\,d\gamma$$

Der er nu anvendt nedenstående substitution og trigonometriske identitet:

$$\beta = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \alpha = 2\beta \quad \Rightarrow \frac{d\alpha}{d\beta} = 2$$

$$\gamma = \operatorname{tg}\beta \quad \Rightarrow \frac{d\gamma}{d\beta} = \frac{1}{\cos^2\beta} \quad \Rightarrow d\beta = \cos^2\beta \cdot d\gamma$$

$$\frac{1}{\sin x\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x\cos^2 x}$$

Vi fortsætter igen:

$$\int \frac{1}{\gamma}\,d\gamma = \ln|\gamma| = \ln|\operatorname{tg}\beta| = \ln|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}| = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}|$$

Vort slutresultat er dermed:

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \ln|\operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + K$$

hvori K er en integrationskonstant.